Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 9

Der „Telstar 18“ ist ungefähr eine Kugel (oder ein Ball ☺) mit Radius $r = 11$ cm. Setzt man den Ursprung des Koordinatensystems in seinen Mittelpunkt und richtet man die x-Achse senkrecht auf das Blatt, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben, so wird seine Oberfläche gegeben durch

$$b(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Kann man sie als eine C^1-Funktion $z = z(x, y)$ (wenigstens lokal) wiedergeben? Auf dem „Äquator“, wo $z = 0$ ist, geht das nicht, weil den Paaren (x, y) mit $x^2 + y^2 \neq r^2$ keiner bzw. zwei Punkte auf der Oberfläche entsprechen. Sonst ist das möglich, z. B. oberhalb des Äquators mit $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Der Satz über implizite Funktionen gibt die Antwort auf die obige Frage im Allgemeinen. Entscheidend ist, ob die partielle Ableitung nach den auszudrückenden Variablen invertierbar ist. Im konkreten Fall muss $D_2 b = \partial_z b = 2z \neq 0$ sein, also wie bereits gesehen $z \neq 0$.

Des Weiteren haben wir gesehen, wie man (lokale) Extrema mit Nebenbedingung bestimmt. Für diesen Fall wissen wir also, wie man die extremalen Werte einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf der Oberfläche vom Telstar 18 bekommt.

Außerdem können wir Funktionen über „fast alle“ beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ integrieren, also auch über einen Fußball.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 6. Juli 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Finden Sie die Punkte auf dem Ellipsoid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1\}$ mit dem größtmöglichen Abstand zur Ebene $\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : 3\xi + 4\eta + 12\zeta = 288\}$.

Hinweis: Den Abstand eines Punktes $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ zur Ebene

$$E = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : a\xi + b\eta + c\zeta - d = 0\}$$

berechnet man mit

$$\operatorname{dist}(p, E) = \left| \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Betrachten Sie einfachheitshalber den quadrierten Abstand.

2. Beweisen Sie, dass durch die Gleichung

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$$

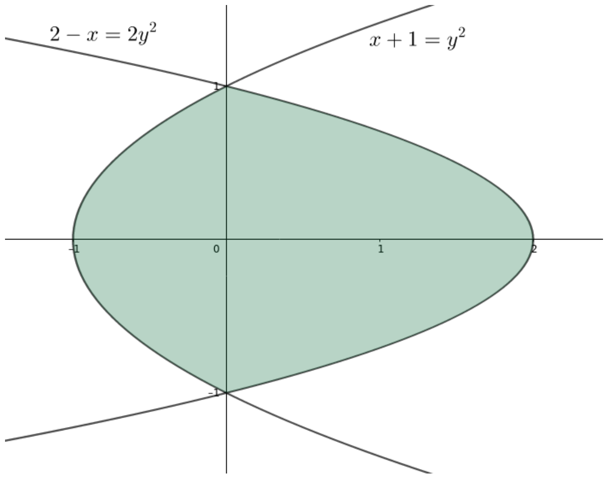
eine stetig differenzierbare Funktion $z = z(x, y)$ in einer Umgebung von $(x, y) = (1, 1)$ wohldefiniert ist. Bestimmen Sie noch deren erstes Taylorpolynom (um $(1, 1)$).

3. Bestimmen Sie für die auf dem Bild dargestellten Fläche

(a) den Flächeninhalt,

(b) den Schwerpunkt,

(c) die Flächenträgheitsmomente um beide Achsen.



4. Berechnen Sie

$$\int_A x^3 y^2 z \; dx \; dy \; dz,$$

wobei $A \subset \mathbb{R}^3$

(a) der Quader $[-1, 2] \times [0, 2] \times [-2, 1]$,

(b) das Tetraeder mit Ecken $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$

ist.